

TEMA 5: DIAGONALIZACIÓN

1. INTRODUCCIÓN

Sea V un espacio vectorial sobre K (R o C).

Sea $f: V \rightarrow V$ una aplicación lineal.

En temas anteriores se vio cómo calcular una matriz que permita cambiar de una base B a una base B' . Además, están las matrices propias de la aplicación lineal en cada base. Todo ello según el esquema:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{A = M(f, B)} & B \\ P \downarrow & & \uparrow P^{-1} \\ B' & \xrightarrow{A' = M(f, B')} & B' \end{array} \quad A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Las matrices A y A' son **semejantes**.

Es interesante encontrar una base en la que la matriz de la aplicación lineal sea diagonal, pues facilita enormemente los cálculos posteriores. Esto se traduce en encontrar una matriz de paso P que permita llegar a dicha base.

Una matriz es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal semejante a ella.

- *Ejemplo:* La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ es diagonalizable:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_P$$

La matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sin embargo, no lo es.

2. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Sea de nuevo el espacio vectorial V y la aplicación $f: V \rightarrow V$.

Es posible que para algún vector $f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$.

En el caso de que suceda lo anterior (siempre que $\vec{x} \neq \vec{0}$), se dice que el vector \vec{x} es un **autovector** asociado a λ . También se le llama **vector propio**.

Se dice entonces que el escalar λ es un **autovalor** o **valor propio** asociado a \vec{x} .

El vector nulo siempre cumple esa condición, por lo que se excluye de la definición.

Si \vec{x} es un autovector, suponiendo que λ_1 y λ_2 son autovalores asociados a \vec{x} :

$$\left. \begin{aligned} f(\vec{x}) &= \lambda_1 \cdot \vec{x} \\ f(\vec{x}) &= \lambda_2 \cdot \vec{x} \end{aligned} \right\} \vec{0} = \lambda_1 \cdot \vec{x} - \lambda_2 \cdot \vec{x} = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \vec{x}$$

$$\text{como } \vec{x} \neq 0 \rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

Si \vec{x} es un autovector, sólo puede tener un autovalor asociado.

Si λ es un autovalor, suponiendo que \vec{x} es un autovector asociado a λ , y que $\vec{z} = 3 \cdot \vec{x}$ (por ejemplo):

$$\left. \begin{aligned} f(\vec{x}) &= \lambda \cdot \vec{x} \\ f(\vec{z}) &= \lambda \cdot \vec{z} \end{aligned} \right\} f(\vec{z}) = f(3 \cdot \vec{x}), \text{ como } f \text{ es aplicación lineal: } = 3 \cdot f(\vec{x}) = \\ = 3 \cdot \lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot 3 \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{z}$$

Si λ es un autovalor, tiene infinitos autovectores asociados.

La igualdad expresada al principio, relacionando los autovectores y los autovalores, en forma matricial queda como:

$$f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x} \quad A \cdot X = \lambda \cdot X$$

$$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = 0$$

Suponiendo que λ es conocido, queda un sistema de ecuaciones.

Si $|A - \lambda \cdot I_n| \neq 0$ es un sistema compatible determinado (solución trivial).

Si $|A - \lambda \cdot I_n| = 0$ es un sistema compatible indeterminado.

Interesa más la segunda condición, pues permite encontrar soluciones adicionales a la trivial.

- *Ejemplo:* (anterior)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda \cdot I_2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot (3-\lambda)$$

$$|A - \lambda \cdot I_2| = 0 \rightarrow (2-\lambda) \cdot (3-\lambda) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2; \lambda_2 = 3$$

Los autovalores son 2 y 3.

A continuación se calculan los autovectores para cada uno. Por ejemplo, para $\lambda = 2$:

$$(A - \lambda \cdot I_2) \cdot X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{(x_1, x_2) / x_2 = 0\} = \langle (1, 0) \rangle = N_{\lambda_2}$$

En aquellos sistemas que sean homogéneos, todas las soluciones serán subespacios vectoriales.

El conjunto de vectores propios asociados a un vector es un subespacio vectorial.

Los autovectores para $\lambda = 3$:

$$(A - \lambda \cdot I_2) \cdot X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{(x_1, x_2) / x_1 = x_2\} = \langle (1, 1) \rangle = N_{\lambda_3}$$

Se llama **polinomio característico** al determinante $|A - \lambda \cdot I_n|$.

Se llama **ecuación característica** a la ecuación $|A - \lambda \cdot I_n| = 0$.

Teorema: Los autovectores de una matriz asociados a autovalores diferentes son linealmente independientes.

Corolario: Si una matriz de tamaño $n \times n$ tiene n autovalores diferentes entonces es diagonalizable.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n .

Sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ una base de V .

Sea la aplicación lineal $f: V \rightarrow V$ $A = M(f, b)$.

autovalores	subespacios	autovectores
λ_1	N_{λ_1}	\vec{v}_1
λ_2	N_{λ_2}	\vec{v}_2
...
λ_n	N_{λ_n}	\vec{v}_n

La base formada por los vectores propios $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es una base de V .

La matriz de paso será:

$$B' \xrightarrow{P} B \quad P = (\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \dots \mid \vec{v}_n)$$

Como son vectores propios:

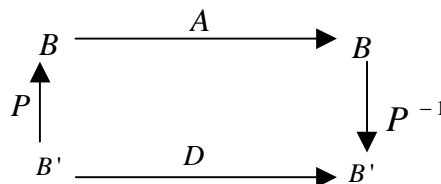
$$\left. \begin{aligned} A \cdot V_1 &= \lambda_1 \cdot V_1 \\ A \cdot V_2 &= \lambda_2 \cdot V_2 \\ \dots \\ A \cdot V_n &= \lambda_n \cdot V_n \end{aligned} \right\}$$

Multiplicando pues la matriz A por la de paso:

$$\begin{aligned} A \cdot P &= A \cdot (V_1 \mid V_2 \mid \dots \mid V_n) = (\lambda_1 \cdot V_1 \mid \lambda_2 \cdot V_2 \mid \dots \mid \lambda_n \cdot V_n) = \\ &= (V_1 \mid V_2 \mid \dots \mid V_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A \cdot P = P \cdot D$$

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D$$



Todo esto es válido siempre que haya n autovectores.

El polinomio resultante de la ecuación característica es:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_r)^{\alpha_r} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = n$$

Es posible que la ecuación presente multiplicidad, es decir, que no coincidan el número de autovalores con el grado. Lo que siempre será cierto es:

$$r \leq n$$

autovalores	multiplicidad	subespacios
λ_1	α_1	N_{λ_1}
λ_2	α_2	N_{λ_2}
\dots	\dots	\dots
λ_r	α_r	N_{λ_r}

Siempre se cumple que:

$$\begin{aligned} \dim(N_{\lambda_1}) &\leq \alpha_1 \\ \dim(N_{\lambda_2}) &\leq \alpha_2 \\ \dots \\ \dim(N_{\lambda_r}) &\leq \alpha_r \end{aligned}$$

La condición necesaria para poder diagonalizar una matriz $n \times n$ es:

$$\text{matriz diagonalizable} \Leftrightarrow \begin{cases} \dim(N_{\lambda_1}) = \alpha_1 \\ \dim(N_{\lambda_2}) = \alpha_2 \\ \dots \\ \dim(N_{\lambda_r}) = \alpha_r \end{cases} \Leftrightarrow \dim(N_{\lambda_i}) = \alpha_i$$

Y además la ecuación característica tiene n soluciones (iguales o diferentes).

Si se trabaja en el plano de los complejos, siempre se cumplirá esta última condición.

Además, se tiene que:

$$(A - \lambda_i \cdot I_n) \cdot X = 0$$

$$\dim(N_{\lambda_i}) = n - \text{rg}(A - \lambda_i \cdot I_n)$$

Es decir, puede que en algún subespacio de algún autovalor aparezcan más de un vector linealmente independiente, lo que propiciará que en total haya vectores propios como para formar una base completa.

autovalores	multiplicidad	subespacios	autovectores
λ_1	α_1	N_{λ_1}	$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{\alpha_1}$
λ_2	α_2	N_{λ_2}	$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{\alpha_2}$
\dots	\dots	\dots	\dots
λ_r	α_r	N_{λ_r}	$\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{\alpha_r}$

La matriz pasa ahora a ser:

$$A \cdot (V_1 \mid \dots \mid V_{\alpha_1} \mid U_1 \mid \dots \mid U_{\alpha_2} \mid \dots \mid W_1 \mid \dots \mid W_{\alpha_r}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

• *Ejemplo:* Diagonalizar la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolviendo la ecuación característica queda:

$$|A - \lambda \cdot I_3| = 0 \rightarrow |A - \lambda \cdot I_3| = -\lambda^3 - \lambda^2 + 21 \cdot \lambda + 45$$

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 21 \cdot \lambda + 45 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -3 \quad (\alpha_1 = 2); \quad \lambda_2 = 5 \quad (\alpha_2 = 1)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 3 = \dim A$$

Los dos subespacios vectoriales serán:

$$(A + 3 \cdot I_3) \cdot X = 0 \rightarrow N_{-3} = \langle (-2, 1, 0), (3, 0, 1) \rangle$$

$$(A - 5 \cdot I_3) \cdot X = 0 \rightarrow N_5 = \langle (-1, -2, 1) \rangle$$

La base $B' = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} = \{(-2, 1, 0), (3, 0, 1), (-1, -2, 1)\}$ está formada por vectores propios. La matriz de paso será entonces:

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y simplemente mirando los autovalores, la matriz diagonal es:

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = M(f, B')$$

Ejercicio: Diagonalizar la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ en el plano de los complejos.

3. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES REALES SIMÉTRICAS

Una matriz A es **simétrica** cuando: $A = A^t$.

Una matriz A es **ortogonal** cuando: $A^{-1} = A^t$.

Teorema: Una matriz es ortogonal si el conjunto de columnas de la misma es ortonormal.

El cálculo de matrices inversas puede facilitarse si encontramos una forma de hacer que los vectores de una matriz sean ortonormales, con lo que se conseguirá una matriz ortogonal.

Repaso de formas bilineales

Sea V un espacio vectorial sobre K .

Sea B una base de V .

Sea $f: V \times V \rightarrow K$ una forma bilineal.

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = X^t \cdot A \cdot Y = (x_1 \quad \dots \quad x_n) \cdot \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) & \dots & f(\vec{e}_1, \vec{e}_n) \\ \dots & & \dots \\ f(\vec{e}_n, \vec{e}_1) & \dots & f(\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Sea B' una base de V , con el posible cambio:

$$\begin{aligned} B' &\xrightarrow{P} B \\ X' &\rightarrow P \cdot X' \\ Y' &\rightarrow P \cdot Y' \end{aligned}$$

$$(P \cdot X')^t \cdot A \cdot (P \cdot Y') = X'^t \cdot P^t \cdot A \cdot P \cdot Y'$$

De donde $P^t \cdot A \cdot P$ es la matriz $M(f, B)$.

Una matriz diagonal era:

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Por lo tanto hemos de lograr que $P^{-1} = P^t$ (P ortogonal).

Buscamos ahora una base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ ortonormal.

$$P = (V_1 \mid \dots \mid V_n)$$

Si la matriz A es simétrica, siempre se cumple que:

- Los vectores propios asociados a autovalores diferentes de una matriz real simétrica, además de linealmente independientes, son ortogonales. Se pueden calcular los vectores ortonormales mediante **Gram-Smith**.
- Si $B = P^{-1} \cdot A \cdot P \rightarrow A$ y B son semejantes (tienen el mismo rango).
- Si A y B tienen el mismo polinomio característico, tendrán los mismos autovalores.
- Para potencias de matriz:

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$A^k = (P \cdot D \cdot P^{-1})^k = P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot \dots \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^k \cdot P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Diagonalizar la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

4. TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON

Si el polinomio característico de una matriz es factorizable, la matriz es raíz de su polinomio característico.

$$p(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda + a_0$$
$$p(A) = 0 \rightarrow a_n \cdot A^n + a_{n-1} \cdot A^{n-1} + \dots + a_1 \cdot A + a_0 \cdot I = 0$$

$$A^n = \frac{1}{a_n} \cdot (-a_{n-1} \cdot A^{n-1} - \dots - a_1 \cdot A - a_0 \cdot I)$$

Suponiendo que existe la inversa:

$$A^{-1} \cdot (a_n \cdot A^n + a_{n-1} \cdot A^{n-1} + \dots + a_1 \cdot A + a_0 \cdot I) = A^{-1} \cdot 0$$
$$a_n \cdot A^{n-1} + a_{n-1} \cdot A^{n-2} + \dots + a_1 \cdot I + a_0 \cdot A^{-1} = 0$$

Se podría calcular como:

$$A^{-1} = \frac{1}{a_0} \cdot (-a_n \cdot A^{n-1} - a_{n-1} \cdot A^{n-2} - \dots - a_1 \cdot I)$$

Siempre que $a_0 \neq 0$. Este valor es siempre $a_0 = |A|$

- *Ejemplo:* Calcular la inversa de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$A^2 + 1 \cdot I = 0 \rightarrow A^2 = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + I = 0$$

$$A^{-1} \cdot (A^2 + I) = 0 \rightarrow A + A^{-1} \cdot I = 0 \rightarrow A = -A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$